**71.14 – Modelos y Optimización I**

*Cuarta Entrega: Heurística y Análisis de Sensibilidad*

2do cuatrimestre 2015

**Integrantes:**

**Nombre E-mail Padrón**

Diego Kim diegofk26@gmail.com 94783

Florencia Rupcic ﬂorencia441@hotmail.com 94525

**Fecha de entrega**: Sábado 21 de noviembre de 2015

*Índice*

Índice . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

Heurística . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2

Pseudocódigo . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Código . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Salida . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Informe de resultados . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Análisis de Sensibilidad . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Enunciado . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Resolución . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

# 

*Heurística*

*Informe de Resultados*

Teniendo en cuenta que nuestro objetivo consiste en determinar la cantidad de combis a utilizar para el traslado de los veinte empleados y determinar el camino mínimo a recorrer por cada una de ellas, se deduce que:

**La cantidad de combis a utilizar es de x combis.**

**Los caminos mínimos recorridos por cada una de ellas** deberán ser los siguientes, en donde se muestra el orden desde el primer domicilio a visitar hasta el último:

Combi 1:

Este recorrido se podrá hacer en un tiempo de x minutos.

Esta combi deberá visitar los siguientes domicilios en el orden indicado:

1. x
2. x
3. x

La combi deberá salir a la hora X para poder completar el recorrido.

Combi 2:

Este recorrido se podrá hacer en un tiempo de x minutos.

Esta combi deberá visitar los siguientes domicilios en el orden indicado:

1. x
2. x
3. x

La combi deberá salir a la hora X para poder completar el recorrido.

Combi 3:

Este recorrido se podrá hacer en un tiempo de x minutos.

Esta combi deberá visitar los siguientes domicilios en el orden indicado:

1. x
2. x
3. x

La combi deberá salir a la hora X para poder completar el recorrido.

**El costo de alquiler de las combis será de: $ x.** Este costo incluye tanto el costo por contratar las combis como el costo por los kilómetros recorridos.

Gráficamente el resultado de la heurística podría representarse como:

**GRÁFICO**

Donde cada combi es representada por un color:

* Combi 1: Azul
* Combi 2: Rojo
* Combi 3: Naranja

**Nota:** La localización de los domicilios no corresponde a la verdadera ubicación, las posiciones fueron modificadas con fines didácticos. Además se agregó el tramo inicial desde Z hacia el primer domicilio para poder representarlo como un problema del viajante (este es ficticio y no pesa en el funcional).

*Análisis de Sensibilidad*

*Ejercicio 6.2*

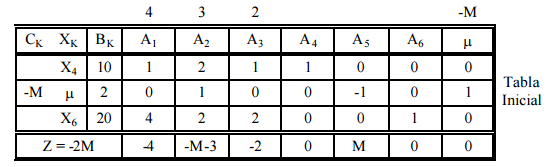
Dados el enunciado de un problema de Programación Lineal y las tablas inicial y final de su resolución por el método Simplex, se pide:

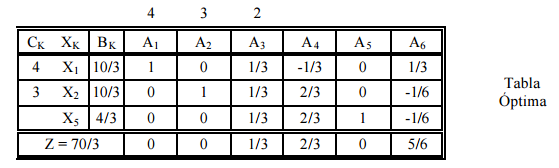
1. ¿Qué utilidad unitaria mínima deberá tener un producto P7 para que sea conveniente producirlo, sabiendo que por unidad requiere 2 kg. de materia prima y 3 horas de máquina? Detallar los cálculos.
2. Graficar la variación de la cantidad de producto 1, del valor marginal del recurso hs. de máquina y del funcional, al variar la disponibilidad de materia prima entre 8 y 30 kg. por día. Indicar el valor de las pendientes señalando en qué parte de la tabla se encuentran.
3. ¿A qué valor total resulta conveniente vender a una empresa interesada, disponibilidad del recurso hs. de máquina en una magnitud de 12 horas? Detallar claramente y justificar los cálculos realizados.
4. Determinar si altera o no la estructura de la solución óptima el hecho de incorporar una nueva restricción, sobre mano de obra, cuya disponibilidad diaria es de 40 hs. hombre, sabiendo que cada producto utiliza 5, 6 y 1 hs. hombre respectivamente por cada unidad. Justificar la respuesta detallando todos los cálculos.

Enunciado:

Una empresa fabrica y vende tres productos (1, 2 y 3). Se dispone de 10 kg. diarios de materia prima y de 20 hs. de máquina diaria. Cada producto requiere 1, 2 y 1 kg. de materia prima, respectivamente, y de 4, 2, y 2 hs. de máquina por unidad. Los beneficios unitarios son de 4, 3 y 2 $/unidad.

Debido a un contrato firmado con un cliente se deben producir, como mínimo, 2 unidades diarias de producto 2.





*Resolución*

Interpretación del enunciado:

Materia Prima:

1 \* X1 + 2 \* X2 + 1 \* X3 <= 10

Producción Mínima:

X2 >= 2

Máquina:

4 \* X1 + 2 \* X2 + 2\* X3 <= 20

a)

Este es un problema de Introducción de un Nuevo Producto.

Para poder calcular la utilidad unitaria mínima del nuevo producto P7 tal que sea conveniente producirlo, primero se debe hallar la Matriz de Cambio de Base.

Para ello se identifica en la primera tabla del problema primal los vectores canónicos. En este caso, en orden, las columnas A4 μ y A6 son aquellas que contienen los vectores canónicos. Para el caso de μ, se trabaja con –A5 ya que se trata de una variable artificial.

Viendo la tabla óptima del primal y revisando las columnas A4, A5 y A6, con A5 cambiada de signo por lo explicado anteriormente, se concluye que la Matriz de Cambio de Base es la siguiente:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| -1/3 | 0 | 2 |
| 2/3 | 0 | 0 |
| 2/3 | -1 | 3 |

Ahora se podrá calcular la nueva columna de la tabla al multiplicar la matriz por el vector que surge de colocar los requerimientos de recursos en orden.

Como la primera columna de la matriz corresponde a la materia prima, la primera fila del vector deberá también corresponder con el requerimiento de la materia prima (en este caso de 2 kg.).

El vector será:

[ 2 0 3 ]

Multiplicando la Matriz de Cambio de Base con el vector anterior, obtenemos un nuevo vector:

[ 1/3 5/6 5/6 ]

Este vector se coloca en la última y nueva columna A7 y se obtiene la nueva tabla.

4 3 2 C7

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ck** | **Xk** | **Bk** | **A1** | **A2** | **A3** | **A4** | **A5** | **A6** | **A7** |
| 4 | X1 | 10/3 | 1 | 0 | 1/3 | -1/3 | 0 | 1/3 | **1/3** |
| 3 | X2 | 10/3 | 0 | 1 | 1/3 | 2/3 | 0 | -1/6 | **5/6** |
| 0 | X5 | 4/3 | 0 | 0 | 1/3 | 2/3 | 1 | -1/6 | **5/6** |
| Z = 70/3 | | | 0 | 0 | 1/3 | 2/3 | 0 | 5/6 | *Z7-C7* |

Se deberá hacer entrar a A7 a la base. Para ello, se necesita que Z7 – C7 sea negativo o igual a 0.

Z7 = 4 \* 1/3 + 3 \* 5/6 + 0 \* 5/6 = 23/6

Como se mencionó antes, Z7 – C7 <= 0. Es decir, Z7 <= C7

Con lo que C7 >= 23/6 para que fabricar el producto sea conveniente.

b)

Se pide graficar la variación de la cantidad de producto 1, del valor marginal del recurso horas de máquina y del funcional. Es decir, hay que calcular la variación de X1, Y3 y Z cuando las disponibilidades de materia prima varían entre 8 y 30 kg. por día.

Para empezar, se sabe que para trabajar con las variaciones de disponibilidades es necesario trabajar en la tabla dual del problema.

El planteo del dual se armó siguiendo las siguientes reglas:

- El problema dual tiene una variable real por cada restricción del problema primal.

Nuestro problema primal tiene tres restricciones, por lo que las variables reales del dual serán Y1, Y2, Y3.

- El problema dual tiene tantas restricciones como variables reales tiene el primal.

El primal tiene tres variables reales, X1, X2 y X3. Por lo tanto, el problema dual tendrá tres restricciones.

- El problema dual es de máximo si el primal es de mínimo y viceversa.

Nuestro problema era de máximo, por lo que el dual será de mínimo.

- Los coeficientes del funcional del primal son términos independientes de las restricciones del dual.

Los coeficientes del funcional del primal son 4, 3 y 2. Por lo tanto, los Bk del dual deberán ser los mismos.

- Los términos independientes del primal son los coeficientes del funcional del dual.

Los términos independientes son 10, -2 y 20.

- La columna de coeficientes en el primal es la fila de coeficientes en el dual.

- El sentido de las desigualdades del primal es opuesto en el dual.

El problema primal original es el que se muestra a continuación:

Materia Prima:

1 \* X1 + 2 \* X2 + 1 \* X3 <= 10

Producción Mínima:

X2 >= 2

Máquina:

4 \* X1 + 2 \* X2 + 2\* X3 <= 20

Para poder realizar el pasaje al dual, es necesario que todas las inecuaciones cuenten con el mismo signo. Para esto, se multiplica la restricción de Producción Mínima por -1 a ambos lados de la inecuación y se invierte el signo a uno de menor igual.

X1 + 2 \* X2 + X3 <= 10

- X2 <= -2

4 \* X1 + 2 \* X2 + 2 \* X3 <= 20

Zmáx = 4 \* X1 + 3 \* X2 + 2 \* X3

Haciendo el pasaje al problema dual, se obtiene lo siguiente:

Y1 + 0 \* Y2 + 4 \* Y3 >= 4

2 \* Y1 – Y2 + 2 \* Y3 >= 3

Y1 + 0 \* Y2 + 2 \* Y3 >= 2

Zmín = 10 \* Y1 – 2 \* Y2 + 20 \* Y3

Se puede armar la tabla óptima del dual a partir de la óptima del primal. Para esto, es necesario trabajar con la tabla que se presenta a continuación para analizar la relación entre las variables del primal con las variables del dual.

X1 = 10/3 Y4 = 0

X2 = 10/3 Y5 = 0

X3 = 0 Y6 = 1/3

X4 = 0 Y1 = 2/3

X5 = 4/3 Y2 = 0

X6 = 0 Y3 = 5/6

Las variables Xi que aparecen subrayadas son aquellas que figuran en la tabla óptima del primal. En la tabla óptima del dual, aparecerán los Yi que se correspondan con aquellas Xi que no aparezcan en la base del primal.

Para completar la tabla dual, se deberá buscar la intersección entre los Yi en la tabla primal y cambiar el signo.

10 -2 20

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ck** | **Yk** | **Bk** | **A1** | **A2** | **A3** | **A4** | **A5** | **A6** |
| 0 | Y6 | 1/3 | 0 | -1/3 | 0 | -1/3 | -1/3 | 1 |
| 10 | Y1 | 2/3 | 1 | -2/3 | 0 | 1/3 | -2/3 | 0 |
| 20 | Y3 | 5/6 | 0 | 1/6 | 1 | -1/3 | 1/6 | 0 |
| Z = 70/3 | | | 0 | -4/3 | 0 | -10/3 | -10/3 | 0 |

Para ver en qué rangos de b1 esta tabla es óptima, se reemplaza el 10 (actual b1) por este término y se busca que los Zi – Ci continúen siendo negativos (menores o iguales a cero) ya que el problema dual es un problema de mínimo.

**b1** -2 20

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ck** | **Yk** | **Bk** | **A1** | **A2** | **A3** | **A4** | **A5** | **A6** |
| 0 | Y6 | 1/3 | 0 | -1/3 | 0 | -1/3 | -1/3 | 1 |
| **b1** | Y1 | 2/3 | 1 | -2/3 | 0 | 1/3 | -2/3 | 0 |
| 20 | Y3 | 5/6 | 0 | 1/6 | 1 | -1/3 | 1/6 | 0 |
|  | | | 0 | (1) | 0 | (2) | (3) | 0 |

1. Para Y2:

-1/3 \* 0 – 2/3 \* b1 + 1/6 \* 20 + 2 <= 0

b1 >= 8

1. Para Y4:

-1/3 \* 0 + 1/3 \* b1 -1/3 \* 20 <= 0

b1 <= 20

1. Para Y5:

-1/3 \* 0 – 2/3 \* b1 + 1/6 \* 20 <= 0

b1 >= 5

Por lo tanto, esta tabla es óptima para:

8 <= b1 <= 20

Ahora es necesario analizar los bordes. Para ello, reemplazo el b1 por cada uno de los valores borde y realizo el mismo procedimiento realizado anteriormente.

En b1 = 20

**20** -2 20

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ck** | **Yk** | **Bk** | **A1** | **A2** | **A3** | **A4** | **A5** | **A6** |
| 0 | Y6 | 1/3 | 0 | -1/3 | 0 | -1/3 | -1/3 | 1 |
| **20** | Y1 | 2/3 | 1 | -2/3 | 0 | **1/3** | -2/3 | 0 |
| 20 | Y3 | 5/6 | 0 | 1/6 | 1 | -1/3 | 1/6 | 0 |
| Z = 30 | | | 0 | -8 | 0 | 0\* | -10 | 0 |

Hay una solución alternativa. Hago ingresar a Y4. Para ver quién sale, calculo tita.

De esta forma se tiene:

Θ

* 🡪 No se puede calcular por ser el divisor negativo

2 Se calcula como ( 2/3 ) / ( 1/3 )

* 🡪 No se puede calcular por ser el divisor negativo

El Θ mínimo (el único en este caso) es el 2, por lo que corresponde hacer salir de la base a la variable Y1.

**b1** -2 20

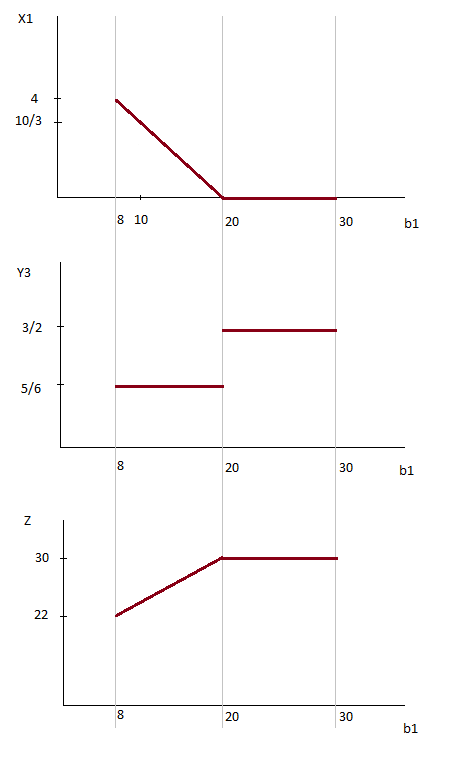
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ck** | **Yk** | **Bk** | **A1** | **A2** | **A3** | **A4** | **A5** | **A6** |
| 0 | Y6 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| 0 | Y4 | 2 | 3 | -2 | 0 | 1 | -2 | 0 |
| 20 | Y3 | 3/2 | 1 | -1/2 | 1 | 0 | -1/2 | 0 |
| Z = 30 | | | (1) | -8 | 0 | 0 | -10 | 0 |

1. Para Y1:

1 \* 20 – b1 <= 0

b1 >= 20

Por lo tanto, esta tabla es óptima para b1 >= 20.



Para graficar X1:

Entre el rango de 8 a 20 se utilizó la primera tabla calculada. Sabiendo que la variable X1 se relaciona con la Y4, se observó el Z4 – C4 al reemplazar b1 por 8 y luego por 20.

En el rango de b1 mayor a 20, se observó que la variable Y4 se encuentra en la base dentro de la segunda tabla. Como sabemos, si esta variable está en la base, X1 (aquella que se relaciona con Y4) no estará en la base del dual, y por ende valdrá cero.

Para graficar Y3:

Se observaron los valores Bk de ambas tablas. En cada tabla este valor es constante, por lo tanto, dentro del rango de 8 a 20 (primera tabla), el valor será uno constante de 5/6. En la segunda tabla, Y3 está dentro de la base con un valor de 3/2.

Para graficar Z:

Se reemplazan los extremos 8 y 20 en b1 de la primera tabla, y realizando los cálculos correspondientes se llega a que para 8 el Z será 22 y que para 20 será 30.

En la segunda tabla, este valor es 30 constante para todos los b1 mayores a 20.

Pendientes:

Para graficar Z:

La variación se realiza sobre b1, que corresponde a Y1. Esta variable se corresponde con X4. Revisando la tabla del primal, el valor marginal en la cuarta columna es 2/3.

Por lo tanto, la pendiente para el rango de 8 a 20 es de 2/3.

Para graficar X1:

La variable X1 se corresponde con la variable Y4. Posicionándonos en la fila correspondiente a Y1 (ya que b1 es lo que se está variando), se busca la intersección con la columna Y4 en la tabla óptima del dual. El valor hallado es de 1/3. Multiplicando por -1 se obtiene el valor de la pendiente, -1/3.

c)

Actualmente se cuenta con 20 horas de máquina diaria. Se desean vender 12 horas de este recurso, lo cual nos dejaría con un total de 8 horas.

Para variar la disponibilidad de un recurso, lo primero que hay que hacer es utilizar la tabla óptima del dual, la cual se construye a partir de la tabla óptima del problema primal que se da en el enunciado como dato.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el inciso anterior, se llega a la siguiente tabla óptima para el dual:

10 -2 **8**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ck** | **Yk** | **Bk** | **A1** | **A2** | **A3** | **A4** | **A5** | **A6** |
| 0 | Y6 | 1/3 | 0 | -1/3 | 0 | -1/3 | -1/3 | 1 |
| 10 | Y1 | 2/3 | 1 | -2/3 | 0 | 1/3 | -2/3 | 0 |
| **8** | Y3 | 5/6 | 0 | 1/6 | 1 | -1/3 | 1/6 | 0 |
| Z = 40/3 | | | 0 | -10/3 | 0 | 2/3 | -16/3 | 0 |

Se trata de un problema de mínimo para el problema dual, por lo que los Zj – Cj deben ser negativos. El único positivo que se puede ver en la tabla anterior es el Z4 – C4 con un valor de 2/3. Hacemos ingresar a Y4 a la base.

Para ver quién sale, se debe calcular tita, dividiendo cada Bk por el valor correspondiente de la columna A4.

De esta forma se tiene:

Θ

* 🡪 No se puede calcular por ser el divisor negativo

2 Se calcula como ( 2/3 ) / ( 1/3 )

* 🡪 No se puede calcular por ser el divisor negativo

El Θ mínimo (el único en este caso) es el 2, por lo que corresponde hacer salir de la base a la variable Y1.

Con el mismo procedimiento, se llega a la nueva tabla óptima:

10 -2 **8**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ck** | **Yk** | **Bk** | **A1** | **A2** | **A3** | **A4** | **A5** | **A6** |
| 0 | Y6 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 |
| 0 | Y4 | 2 | 3 | -2 | 0 | 1 | -2 | 0 |
| **8** | Y3 | 3/2 | 1 | -1/2 | 1 | 0 | -1/2 | 0 |
| Z = 12 | | | -2 | -2 | 0 | 0 | -4 | 0 |

De esta forma se puede concluir que con 8 hs. máquina diarias disponibles, se obtiene una ganancia de $12.

Anteriormente, con 20 hs. máquina diarias, se ganaban $70/3 ≈ $23,33.

Para que convenga realizar la venta, debería vender esas horas a 70/3 – 12 = 34/3 ≈ $11,33.

d)

Se pide incorporar una nueva restricción sobre la mano de obra. Se indica que la disponibilidad diaria es de 40 hs. hombre, y que cada producto utiliza 5, 6 y 1 hs. hombre respectivamente por cada unidad.

Esta restricción podría escribirse como:

5 X1 + 6 X2 + 1 X3 <= 40

Para ver si altera o no la estructura de la solución óptima el hecho de agregar esta nueva restricción, se toman los valores de la tabla óptima dada como dato en el enunciado.

Analizándola, llegamos a la conclusión de que X1 y X2 son los únicos productos que se están fabricando, ya que X3 no se encuentra dentro de la base.

Interpretando la tabla y analizando la columna Bk, obtenemos que:

X1 = 10/3 X2 = 10/3 X3 = 0

Reemplazando dichos valores en la restricción anterior:

5 \* 10/3 + 6 \* 10/3 + 1 \* 0 <=40

Resolviendo los cálculos:

50/3 + 60/3 + 0 <= 40

110/3 ≈ 36,66 <= 40

Esta inecuación es verdadera, por lo que se puede concluir que incorporar esta nueva restricción **no alteraría la estructura de la solución óptima**.